# Tema 5. Variables Aleatorias

## Presentación y Objetivos.

En este tema se estudia el concepto básico de Variable Aleatoria así como diversas funciones fundamentales en su desarrollo. Es un concepto clave, de su buena comprensión dependerá el poder trabajar con modelos probabilísticos apropiados del mundo real. Las medidas características que se estudiaron en el tema 2 relacionadas con un conjunto de datos se extienden a medidas características de variables aleatorias al final del tema.

Los objetivos de este tema son:

1. Comprender el uso de la variable aleatoria para modelizar la incertidumbre.
2. Dominar diferentes herramientas para describir una ley de incertidumbre y conocer sus propiedades matemáticas.
3. Comprender y manejar el operador esperanza y varianza.

## Esquema Inicial

1. Variable aleatoria. Concepto.
2. Tipos de variables aleatorias.
3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias.
4. Medidas características de una variable aleatoria.
5. Desigualdad de Tchebychev.

## Desarrollo del tema:

### 1. Variable Aleatoria. Concepto.

Previamente a la definición formal, se ilustra el concepto con un par de ejemplos:

Dado un fenómeno o experimento aleatorio como, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda, interesa conocer si es cara o cruz. Para facilitar el tratamiento matemático del resultado del experimento se asociará a cada resultado posible un número real. Así, por ejemplo, si sale cara se representa con un 1 y si sale cruz con un 0. Esta es la versión más sencilla de variable aleatoria, una función que asocia a cada resultado posible del espacio muestral un número real.

**Ejemplo 1:** En el experimento de lanzar una moneda, el espacio muestral (conjunto de resultados posibles) es $\Omega = \{c, x\}$. En este contexto y si la moneda no está trucada:

$$P(c) = \frac{1}{2} \quad y \quad P(x) = \frac{1}{2}$$

Asociar a cada resultado del experimento un número real es el primer paso para definir una variable aleatoria, por ejemplo:

$$X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$c \longrightarrow 1$$

$$x \longrightarrow 0$$

**Ejemplo 2:** En el lanzamiento de dos monedas interesa conocer el número de caras en una tirada. Se asocia a cada resultado posible del experimento un número que represente dicho número de caras, definiendo la aplicación:

$$\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$cc \longrightarrow 2$$

$$cx \longrightarrow 1$$

$$xc \longrightarrow 1$$

$$xx \longrightarrow 0$$

**Definición:** Sea **Ω** un espacio muestral sobre el que está definida una función de probabilidad. Una **variable aleatoria** *X* es una función con valores en ℝ definida sobre **Ω**. Transforma los resultados de **Ω** en puntos de ℝ, es decir, en cantidades numéricas. Es *aleatoria* porque involucra la probabilidad de los resultados de **Ω**.

**Ejemplo 3:** En el experimento del ejemplo 2, $\Omega = \{cc, cx, xc, xx\}$. La probabilidad de cada uno de estos resultados, al ser las tiradas independientes, es ¼. La variable aleatoria X definida es tal que:

$$\mathrm{X}(cc) = 2, \qquad \mathrm{X}(cx) = \mathrm{X}(xc) = 1, \qquad \mathrm{X}(xx) = 0$$

En general, se definirá la variable aleatoria asignando a cada resultado del experimento un número de forma que:

- Si el resultado es numérico porque se cuenta o se mide la característica, los posibles valores de la variable aleatoria coincidirán con los resultados del experimento.
- Si el resultado es cualitativo, se hace corresponder a cada resultado un número de forma arbitraria (por ejemplo, 0 si una pieza no es defectuosa, 1 si lo es).

La variable aleatoria estará definida cuando se hayan especificado sus posibles valores con sus respectivas probabilidades.

**Ejemplo 4:** La variable aleatoria del ejemplo 2 toma los valores 0, 1 y 2, según sea el número de caras obtenidas al lanzar las dos monedas. La probabilidad, que en un principio estaba definida sobre el espacio muestral $\Omega$, se traslada, **inducida por la variable aleatoria *X***, a una probabilidad sobre los valores 0, 1 y 2:

$$P(X = 0) = P(\{xx\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(\{cx, xc\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(\{cc\}) = \frac{1}{4}$$

| Resultado | Valor de la variable aleatoria | Número de ocurrencias | Probabilidad |
|---|---|---|---|
| **{xx}** | 0 | 1 | 1/4 |
| **{cx,xc}** | 1 | 2 | 1/2 |
| **{cc}** | 2 | 1 | 1/4 |

Tabla 1: Correspondencia entre los resultados del experimento y la variable aleatoria del ejemplo 2.

## 2. Tipos de Variables Aleatorias.

Las variables aleatorias poseen intrínsecamente la naturaleza discreta o continua del espacio muestral asociado. Se tienen:

- **Variables Aleatorias Discretas:** toman un número finito o infinito numerable de valores. Se corresponden con experimentos en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un suceso. Por ejemplo, número de caras en sucesivas tiradas de una moneda, número de piezas defectuosas en ciertos lotes, etc.
- **Variables Aleatorias Continuas:** toman un conjunto de valores infinito no numerable, generalmente, uno o varios intervalos de la recta real. Por ejemplo, el peso de una persona, duración de un proceso, etc.

## 3. Distribuciones de Probabilidad de Variables Aleatorias.

Se estudian a continuación las herramientas fundamentales para manejar y describir la distribución de probabilidad representada por una variable aleatoria. Para una variable aleatoria

discreta se introducen los conceptos de **función de probabilidad** y **función de distribución**. Para una variable aleatoria continua se introducen los conceptos de **función de densidad** y **función de distribución**.

3.1. Variables Aleatorias Discretas

La variable aleatoria discreta reparte o distribuye su masa o probabilidad en una cantidad discreta de puntos. Se denotará por $p(x) = P(X = x)$ la probabilidad de que $X$ tome el valor $x$. Al considerar los valores de una variable aleatoria, la función que asigna una probabilidad a cada realización $x$ de $X$ recibe el nombre de **función de probabilidad**. Esta función de probabilidad también se llama **función de masa** o **cuantía**. Claramente, si el valor *x* concreto no es uno de los valores de X, entonces su probabilidad será cero, $p(x) = 0$.

La función $p(x) = P(X = x)$ es función de probabilidad de una variable aleatoria $X$ si satisface:

- $p(x) \geq 0$, para todos los valores x de $X$.
- $\sum_x p(x) = 1$

Se llama **soporte** de una variable aleatoria discreta al conjunto de puntos que tienen probabilidad distinta de 0 y a cada uno de esos puntos se les llama **puntos de masa**.

**Ejemplo 5:** La variable aleatoria *X = número de caras que se obtienen al lanzar dos monedas* tiene como soporte el conjunto $\{0,1,2\}$ y su función de probabilidad es (ver ejemplo 4):

$$p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$p(1) = p(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

La representación gráfica de esta función se muestra en la figura 1.

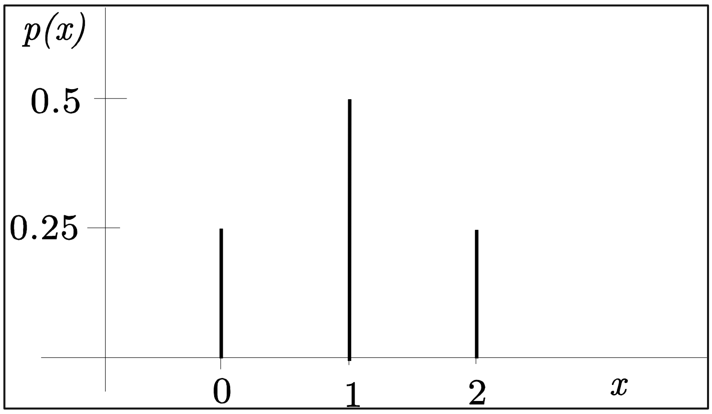


Figura 1: Función de probabilidad del ejemplo 5.

Otra forma equivalente de caracterizar la distribución de una variable aleatoria es mediante la **función de distribución**. La función de distribución de la variable aleatoria $X$, definida en cada punto $x_0$, da la probabilidad de que $X$ tome un valor menor o igual que $x_0$.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x_0} p(x_i)$$

Si la variable aleatoria toma los valores (ordenados) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, la función de distribución viene dada por:

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = p(x_1)$$

$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = p(x_1) + p(x_2)$$

$$\vdots$$

$$F(x_n) = P(X \leq x_n) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Por tanto, la función de distribución tiene saltos en los puntos que tienen probabilidad distinta de cero del espacio muestral. Estos saltos tienen como magnitud la probabilidad en dicho punto. La función es constante en los puntos situados entre dos puntos de salto.

En general, la función de distribución de una variable aleatoria discreta se caracteriza por:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x$.
2. Es monótona no decreciente: si $x_i \leq x_j \Longrightarrow F(x_i) \leq F(x_j)$.
3. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.
4. Es continua por la derecha: $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x), h > 0$.

Además, se puede establecer:

5. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.
6. $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$, si $X$ toma valores enteros.
7. $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$, si $X$ toma valores enteros.

**Ejemplo 6:** continuando con el ejemplo 5, la función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1/4 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La representación gráfica se muestra en la figura 2.

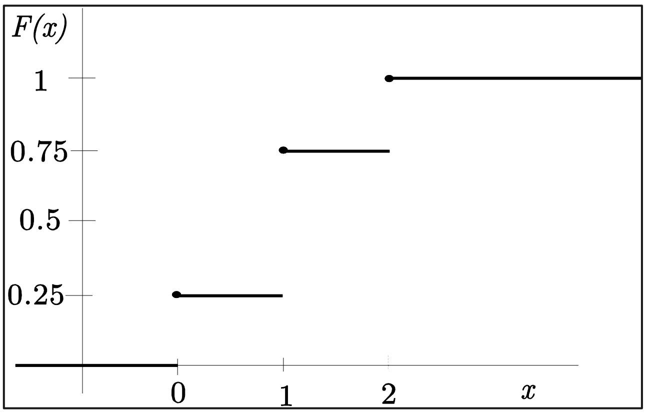


Figura 2: Función de distribución del ejemplo 6.

3.2 Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria continua toma valores en un conjunto infinito no numerable de puntos. En este caso no es posible asignar una probabilidad a cada uno de los infinitos valores posibles que puede tomar por lo que se habla de probabilidad de intervalos en lugar de probabilidad de puntos. De hecho, la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor concreto y específico es cero. Por ejemplo, si se mide el tiempo de ejecución de determinado programa de forma repetida con un cronómetro de precisión hasta las milésimas, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente una duración de 3,332 minutos? Tal vez no se obtenga nunca, por muchas mediciones que se efectúen. Sin embargo, sí se obtendrán medidas que oscilen entre 3 y 3,5 segundos, es decir, en el intervalo [3; 3,5] o en el intervalo [3,4].

Las variables aleatorias continuas se caracterizan mediante su **función de densidad** y/o su **función de distribución**.

La función de densidad no es la misma que la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Como la probabilidad de que $X$, variable aleatoria continua, tome un valor específico $x$ es cero, la función de densidad **no** representa la $P(X = x)$. Lo que hace es proporcionar un método para determinar la probabilidad de que la variable aleatoria $X$ pertenezca a un intervalo, $a \leq X \leq b$, con a y b números reales. Si se representa una variable aleatoria continua mediante un histograma y dibujamos el polígono de frecuencias, este polígono tenderá a una curva suave conforme aumentemos el número de clases reduciendo su longitud cada vez más (ver figura 3). Esa curva suave representará el comportamiento de la variable estudiada y coincidirá con la función de densidad, que se denotará por $f(x)$.

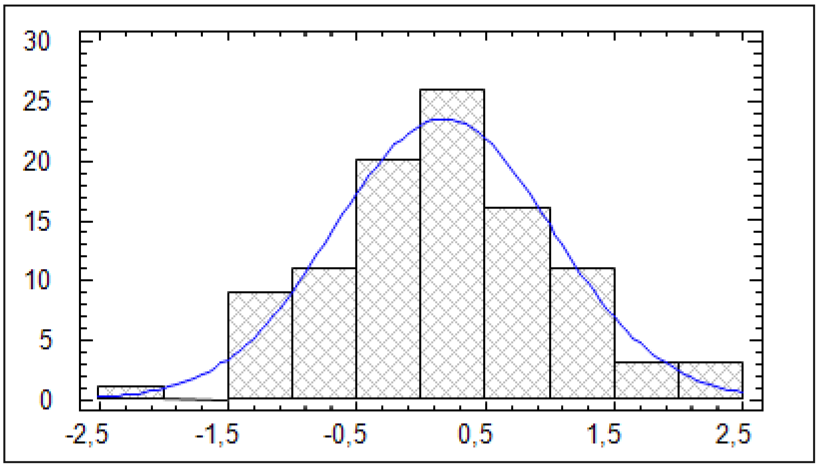


Figura 3: La función de densidad como límite de histogramas

Se dirá que $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua si verifica:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, es decir, el área bajo la curva es igual a 1.

El conocimiento de la función de densidad permite calcular las probabilidades de distintos intervalos mediante integración (ver figura 4).

$$P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

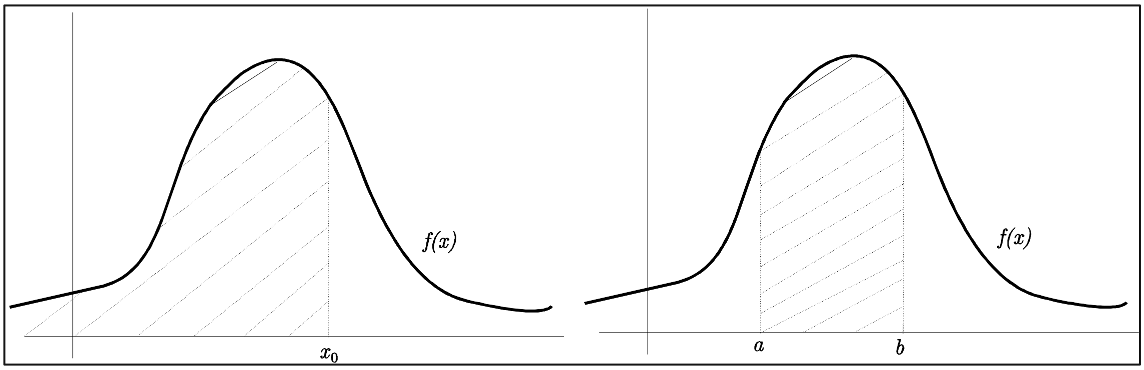


Figura 4: $P(X \leq x_0)$ y $P(a \leq X \leq b)$, respectivamente

Para una base lo suficientemente pequeña, $\Delta x$, la probabilidad del intervalo $(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, x_0 + \frac{\Delta x}{2})$, se puede aproximar por el área del rectángulo de altura $f(x_0)$ (ver figura 5) , es decir,

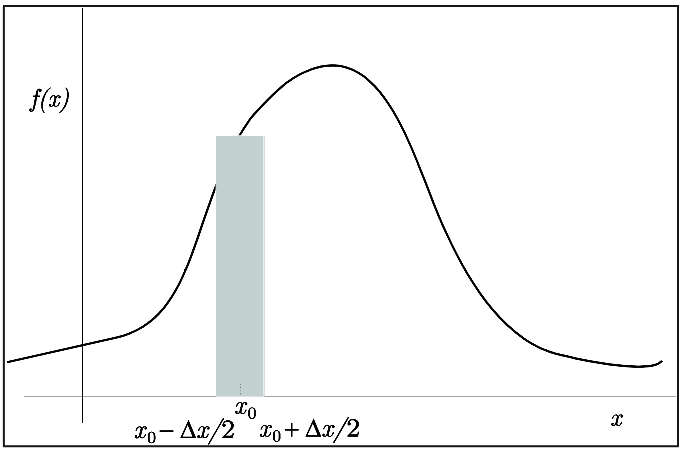


Figura 5: Interpretación de $f(x_0)$

Si $\Delta x = 1$, $P(x_0 - 0{,}5 \leq X \leq x_0 + 0{,}5) \approx f(x_0)$ y se interpretará $f(x_0)$ como la probabilidad de que $X$ tome un valor entre $x_0 - 0{,}5$ y $x_0 + 0{,}5$.

En resumen, la función de densidad $f(x)$ representa una aproximación muy útil para calcular probabilidades partiendo de un histograma de forma:

- Más simple: la expresión de $f(x)$ sustituye a la tabla completa de valores de la distribución de frecuencias.
- Más general: no refleja el comportamiento de una muestra sino la estructura en la distribución de los valores de la variable a largo plazo.
- Más operativa: permite obtener la probabilidad de cualquier suceso.

Para una variable aleatoria $X$ se define la **función de distribución *F(x)*** como en el caso discreto. Es la probabilidad de que $X$ tome un valor menor o igual que un $x$ específico:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Es el área bajo la curva representada por la función de densidad $f(x)$ situada a la izquierda de la recta $X = x$. Como $P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$, se tiene:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

También se tiene que:

1. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$
2. F es continua
3. Si $f$ es continua en $x$, entonces $F$ es derivable en $x$ y $F'(x) = f(x)$.

En general, la función de distribución *F(x)* de una variable aleatoria continua $X$ se caracteriza por:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x.$
2. $Si \ \ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$, es decir, es monótona no decreciente.
3. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$
4. $F$ es continua.

Además, se puede establecer:

5. $P(X \geq x) = 1 - F(x)$
6. $P(X = x) = 0$
7. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$
8. $F'(x) = f(x)$ si $f$ es continua en $x$.

**Ejemplo 7:** Se tiene la función:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \ \ x > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$. Comprobar que $f(x)$ define una función de densidad, obtener la correspondiente función de distribución $F(x)$ y calcular $P(2 < X < 6)$ y $P(X \leq 8)$.

Es función de densidad, ya que:

- $f \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x}\,|_{0}^{\infty} = 1$

Para la función de distribución se tiene:

$$\forall x > 0,\ \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda x}|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\forall\, x \leq 0,\ \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Por tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

*F(x)* es una función continua y *f(x)* es la derivada de $F(x)\ \ \forall\, x\ \in\ \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que en $x = 0$ la función $F$ no es derivable (*f* es discontinua en $x = 0$).

$$P(2 < X < 6) = F(6) - F(2) = 1 - e^{-6\lambda} - \left(1 - e^{-2\lambda}\right) = e^{-2\lambda} - e^{-6\lambda}$$

$$P(X \leq 8) = F(8) = 1 - e^{-8\lambda}$$

**4. Medidas Características de una Variable Aleatoria.**

Para la distribución de una variable aleatoria se definen medidas características igual que se hizo anteriormente para una distribución de frecuencias. Estas medidas características se suelen representar con letras griegas para diferenciarlas de las que se calculan sobre un conjunto de datos o muestra, que se representan con letras romanas y que se estudiaron en el tema 2.

4.1. Medidas de centralización.

4.1.1. Media

La **media**, **esperanza matemática** o **valor esperado** de una variable aleatoria *X* es el promedio o valor medio de *X* y se obtiene, por tanto, promediando (multiplicando) cada posible valor por su probabilidad.

$$E(X) = \sum_{x} xp(x) = \mu \quad \text{si} \quad X \ \text{ es discreta}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu \quad \text{Si} \quad X \quad \text{es continua}$$

siendo *p(x)* y *f(x)* las funciones de probabilidad y de densidad respectivamente.

**Ejemplo 8:** Un inversor dispone de 150.000 euros y dos opciones de inversión: la primera, a plazo fijo con una ganancia de un 15%; la segunda mediante un fondo de inversión cuya ganancia es una variable aleatoria *X* con la siguiente función de probabilidad:

| Ganancia en % | Probabilidad |
|---|---|
| 5 | 0,05 |
| 10 | 0,10 |
| 15 | 0,15 |
| 20 | 0,30 |
| 25 | 0,20 |
| 30 | 0,20 |

Tabla 2: Tabla del ejemplo 8.

La esperanza matemática de la variable aleatoria de la segunda opción es:

$$E(X) = 5 \times 0{,}05 + 10 \times 0{,}1 + 15 \times 0{,}15 + 20 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}2 + 30 \times 0{,}2 = 20{,}5$$

Con la primera opción obtenemos un beneficio fijo del 15%. Con la segunda, obtenemos una ganancia promedio del 20,5%. Utilizando el concepto de esperanza matemática se debería elegir la segunda opción.

**Ejemplo 9:** La esperanza de la variable aleatoria del ejemplo 7 es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Observaciones:

- La esperanza no tiene por qué ser uno de los valores posibles de la variable aleatoria *X*.
- La esperanza es un número fijo, no es una función de *X*. Puede no existir si la correspondiente suma o integral no converge a un valor finito.

Propiedades de la esperanza matemática:

1. Si c es una constante, $E(c) = c$.
2. Si $X$ es una variable aleatoria con distribución conocida y se define $Y = h(X)$, se tiene:

$$E(h(X)) = \begin{cases} \sum_x h(x)p(x) & si\ X\ es\ discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx & si\ X\ es\ continua \end{cases}$$

3. Si a y b son números reales, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
4. $E\big(g(X) + h(X)\big) = E\big(g(X)\big) + E(h(X))$.

4.1.2. Mediana

Intuitivamente es aquél valor que divide el total de la probabilidad en dos partes iguales. Se dirá que $M_e$ es la **mediana** de $X$ si:

$$P(X \leq M_e) = \frac{1}{2} \quad si\ X\ es\ continua$$

$$F(M_e) \geq \frac{1}{2} \quad y \quad F(M_e^-) \leq \frac{1}{2} \quad si\ X\ es\ discreta$$

En el caso discreto es el menor valor que satisface $F(x) \geq \frac{1}{2}$.

En las figuras 6 y 7 se puede ver cómo obtener la mediana gráficamente a partir del dibujo de la función de distribución. La figura 6 en concreto refleja el caso en el que la mediana no es única.

**Ejemplo 10:** Calcular la mediana para $X$, variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & si\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

La mediana es tal que $F(M_e) = 0.5$, por tanto:

$$F(M_e) = \int_0^{M_e} 4x^3 dx = (M_e)^4 = \frac{1}{2} \Longrightarrow M_e = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

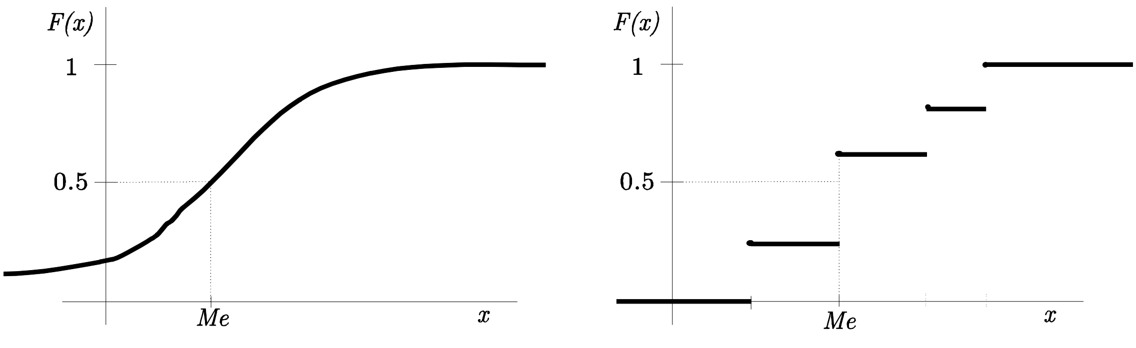


Figura 6: Obtención de la mediana.

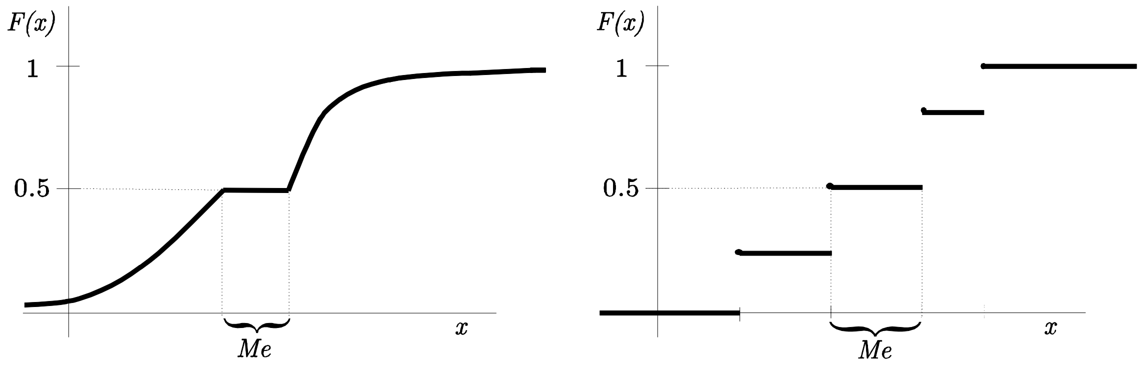


Figura 7: Casos en que la mediana no es única

4.1.3. Moda

Para una variable aleatoria $X$ se define la **moda** $M_o$ como aquél valor de $X$ más probable. Es decir, es el valor que maximiza la función de probabilidad si $X$ es discreta y el valor que maximiza la función de densidad si $X$ es continua. En este último caso debería verificar que $f'(x) = 0 \quad y \quad f''(x) < 0$. Si la moda no es única, la distribución correspondiente se llama plurimodal o multimodal.

4.2. Medidas de dispersión:

A cada medida de centralización se le puede asociar una medida de dispersión.

4.2.1. Varianza y desviación típica.

La **varianza** es la medida de dispersión asociada a la media. Se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_x (x-\mu)^2 p(x) & si\ X\ es\ discreta \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx & si\ X\ es\ continua \end{cases}$$

siendo $\mu = E(X)$. Es decir,

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina **desviación típica**, $\sigma = +\sqrt{V(X)}$.

La varianza es una medida de dispersión alrededor de la media. La figura 8 nos muestra dos funciones de densidad para el caso de variables aleatorias continuas con distinta varianza. La más alta tiene menor varianza que la otra es decir, está menos dispersa alrededor de la media que, en ambos casos, es 0.

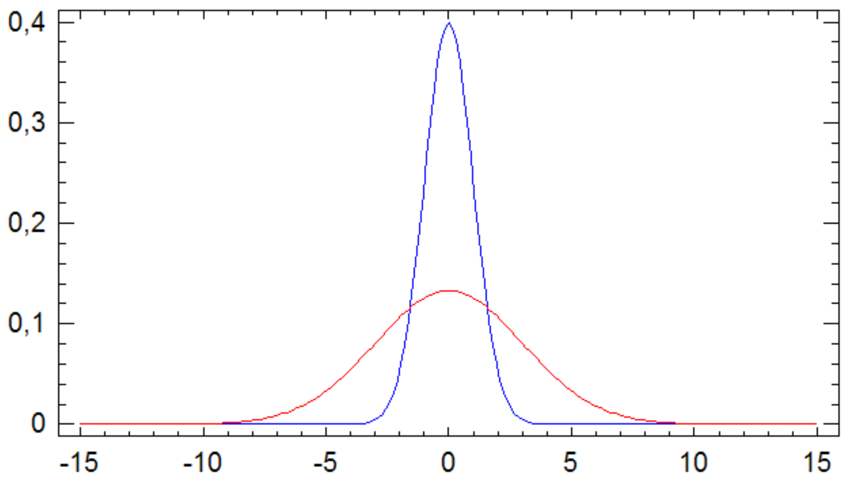


Figura 8: Dos funciones de densidad con igual media y distinta varianza

Propiedades:

1. $V(X) \geq 0$.
2. $Si\ a\ y\ b\ son\ dos\ números\ reales,\ V(aX+b) = a^2V(X)$
3. Para cualquier variable aleatoria $X$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
4. $V(X) = 0 \Leftrightarrow \exists\ c\ constante\ tal\ que\ P(X = c) = 1$

Se define el **coeficiente de variación** de Pearson como:

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

Expresa la magnitud de la dispersión de una variable aleatoria con respecto a su media. Se utiliza para comparar dos distribuciones de probabilidad cuando la escala de medición difiere de manera apreciable entre éstas.

4.2.2. Cuantiles

Para cualquier variable aleatoria $X$, $x_p$ es un **cuantil** de orden $p \in [0,1]$, si verifica:

$$P(X < x_p) = F(x_p^-) \leq p \quad y \quad P(X \leq x_p) \geq p$$

Para una variable aleatoria continua, esto equivale a $F(x_p) = p$.

Los cuantiles más importantes son:

- Percentiles: son los puntos que dividen la distribución en 100 intervalos, cada uno con probabilidad 0,01.

- Cuartiles: son 3 puntos que dividen la distribución en 4 partes iguales, cada una con probabilidad 0,25.
- Deciles: son 9 puntos que dividen la distribución en 10 partes iguales, cada una con una probabilidad de 0,1.

### 4.2.3. Recorrido

El **recorrido** es la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores que puede tomar una variable aleatoria. El **recorrido** o **rango intercuartílico** es la diferencia entre el tercer y primer cuartil, es decir, $x_{0,75} - x_{0,25}$. Representa la zona central de la distribución en la que se encuentra el 50% de la probabilidad. Este rango es la medida absoluta de dispersión más utilizada.

También se puede utilizar el **recorrido** o **rango interdecílico** que es la diferencia entre el noveno y el primer decil, es decir, $x_{0,9} - x_{0,1}$. Representa la zona central en la que se encuentra el 80% de la probabilidad.

## 4.3. Momentos de una variable aleatoria

Los **momentos** de una variable aleatoria son valores esperados de ciertas funciones de $X$. Forman una colección de medidas descriptivas que se pueden utilizar para caracterizar la distribución de $X$.

### 4.3.1. Momento de orden k respecto del origen

También llamado **momento de orden k alrededor del cero** o **centrado**, se define como:

$$\alpha_k = E(X^k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x^k p(x) & si\ X\ es\ discreta \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx & si\ X\ es\ continua \end{cases}$$

### 4.3.2. Momento central de orden k

También llamado **momento de orden k alrededor de la media** o **centrado** en la media, se define como:

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x (x-\mu)^k p(x) & si\ X\ es\ discreta \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x)dx & si\ X\ es\ continua \end{cases}$$

Observaciones:

1. $\alpha_1 = \mu$
2. $\mu_2 = V(X)$
3. $\alpha_0 = \mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

4.5. Medidas de Forma

4.5.1. Medidas de asimetría

Si la distribución de *X* es simétrica respecto a μ, todos los $\mu_k$ con *k* impar serán 0. Sin embargo, si la distribución es asimétrica, los $\mu_k$ se harán cada vez mayores cuanto más grande sea la asimetría. Se utiliza como medida de la asimetría de una distribución el tercer momento central estandarizado, que se denomina **coeficiente de asimetría de Fisher** o **primer factor de forma**:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- Si $\gamma_1 = 0$ la distribución es simétrica.
- Si $\gamma_1 > 0$ la distribución presenta asimetría positiva o desviada a la derecha.
- Si $\gamma_1 < 0$ la distribución presenta asimetría negativa o desviada a la izquierda.

4.5.2. Medidas de apuntamiento o curtosis

El **coeficiente de apuntamiento** o **segundo factor de forma** se define como el cuarto momento central estandarizado, es decir,

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- Si $\gamma_2 = 0$ la distribución es mesocúrtica (ni alta ni baja)
- Si $\gamma_2 > 0$ la distribución es leptocúrtica (con un pico bastante alto)
- Si $\gamma_2 < 0$ la distribución es platicúrtica (relativamente plana)

4.6. Estandarización de una variable aleatoria

Si *X* es una variable aleatoria con media o esperanza μ y desviación típica σ, la variable aleatoria:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

recibe el nombre de variable aleatoria **estandarizada** o **tipificada** correspondiente a $X$. Se caracteriza por tener media o esperanza 0 y desviación típica igual a 1. La estandarización afecta a la media y varianza de la variable original pero no a los factores de forma.

**5. Desigualdad de Tchebychev.**

Sea $X$ una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, entonces:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall \; k > 0$$

es decir,

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2} \quad \forall \; t > 0$$

Una forma más desarrollada de dicha desigualdad es:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Conociendo la media y la desviación típica de una variable aleatoria se puede calcular la proporción de la distribución que está entre $\mu \pm k\sigma$, siendo $k > 0$. Por ejemplo, para cualquier variable aleatoria, el intervalo $\mu \pm 3\sigma$ contiene al menos el 89% de la distribución y el intervalo $\mu \pm 4\sigma$ el 94%.

**Ejemplo 11:** La variable aleatoria $X$ = *número de personas que acuden diariamente a cierto local* tiene distribución conocida, media $\mu = 200$ y desviación típica $\sigma = 10$. ¿Cuántas sillas habrá que preparar para tener una probabilidad de 0,75 o más de que todos los asistentes pueden sentarse?

Lo resolvemos mediante la desigualdad de Chebychev. Queremos una probabilidad de al menos 0,75 de que la distancia entre X y su media sea menor o igual que un valor *t*. Ese valor *t* sumado a la media será el número de sillas que buscamos.

$$P(|X - 200| \leq t) \geq 1 - \frac{100}{t^2} = 0{,}75 \implies t = 20$$

Con lo que el número de sillas que necesitamos es 220.